

МАТЕМАТИЧКИ ДЕСЕТОБОЈ

- ЧЕТВРТО КОЛО -

РЕШЕЊЕ ПРОБЛЕМА

МАГИЧНИ БРОЈЕВИ

Докажимо најпре да је број 250 магичан. Један од начина на који је то могуће доказати је тај да приметимо да је $\underbrace{10 + 10 + \dots + 10}_5 + \underbrace{20 + 20 + \dots + 20}_{10} = 250$ и $\underbrace{\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10}}_5 + \underbrace{\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{20}}_{10} = 1$. Ово није једини начин. Још неки занимљиви начини су:

$$\underbrace{22 + 22 + \dots + 22}_{11} + 4 + 4 = 250 \quad \text{и} \quad \underbrace{\frac{1}{22} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{22}}_{11} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

$$2 + 8 + 8 + 8 + 32 + 32 + 32 + 64 + 64 = 250 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = 1.$$

Последње наведени начин нам је послао ДИОФАНТ и тај начин нуди одређени вид стратегије којом само помоћу степена броја 2 покушавамо да докажемо да је неки број магичан.

Покушајмо сада да докажемо да су бројеви 502 и 1006 магични. Лако можемо уочити да међу бројевима 250, 502 и 1006 важе везе $502 = 2 \cdot 250 + 2$ и $1006 = 2 \cdot 502 + 2$. То нас може нагнати на следеће размишљање "Ако је неки број n магичан, да ли се помоћу тога може доказати да је и број $2n + 2$ такође магичан?". Пре него што наставите са читањем овог решења, предлажемо вам да докажете да је одговор на претходно питање потврдан.

Нека је број n магичан. То значи да постоје природни бројеви x_1, x_2, \dots, x_k такви да је $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ и $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k} = 1$. Уколико удвостручимо бројеве x_1, x_2, \dots, x_k имамо бројеве $2x_1, 2x_2, \dots, 2x_k$ за које важи $\frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \dots + \frac{1}{2x_k} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Последњем збиру недостаје сабирак $\frac{1}{2}$ да би постао једнак 1. Зато убацимо и број 2, односно посматрајмо бројеве $2x_1, 2x_2, \dots, 2x_k, 2$. Збир њихових реципрочних вредности једнак је 1, док је $2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_k + 2 = 2n + 2$. Овим смо доказали, уколико је број n магичан, онда је и број $2n + 2$ магичан. На основу овог, како је број 250 магичан то је најпре магичан број 502, а из тога што је 502 магичан проистиче да је магичан и број 1006. На овај начин смо доказали да су бројеви 250, 502 и 1006 магични и није неопходно да за бројеве 502 и 1006 пронађемо конкретан начин представљања који доказује да су магични. Узгред, конкретни начини, проистекли из претходног доказа и првонаведеног представљања за број 250, били би:

$$\underbrace{20 + 20 + \dots + 20}_5 + \underbrace{40 + 40 + \dots + 40}_{10} + 2 = 502 \quad \text{и} \quad \underbrace{\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{20}}_5 + \underbrace{\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}}_{10} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\underbrace{40 + 40 + \dots + 40}_5 + \underbrace{80 + 80 + \dots + 80}_{10} + 4 + 2 = 1006 \quad \text{и} \quad \underbrace{\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}}_5 + \underbrace{\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80}}_{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1.$$

Остаје нам још да докажемо да је број 2021 магичан. Очигледно је да овде не можемо да применимо тврђење које смо доказали - ако је број n магичан, онда је и број $2n + 2$ магичан. Ипак, хајде да видимо у каквој је вези број 2021 са магичним бројем 1006. Једна веза између њих је $2021 = 2 \cdot 1006 + 9$. Да ли сада имате идеју шта би било корисно да се докаже и како би то доказали? Предлажемо вам да подробно размислите о одговору на ово питање и будете упорни. Наставак решења је на следећој страни. Без обзира да ли сте успели самостално да откријете зашто је број 2021 магичан, саветујемо вам да прочитате наставак решења.

Доказаћемо да уколико је број n магичан, онда је магичан и број $2n + 9$. Ако је број n магичан, то значи да постоје природни бројеви x_1, x_2, \dots, x_k такви да је $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ и $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k} = 1$. Приметимо да је $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Зато ако посматрамо бројеве $2x_1, 2x_2, \dots, 2x_k, 3, 6$ имамо $\frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \dots + \frac{1}{2x_k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, док је $2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_k + 3 + 6 = 2n + 9$. Овим смо доказали да је број $2n + 9$ магичан уколико је магичан број n . Одавде, како смо доказали да је 1006 магичан број, закључујемо да је и број $2 \cdot 1006 + 9 = 2021$ магичан, што смо и желели да докажемо. Узгред, из самог доказа и раније наведеног представљања за број 1006 које доказује да је он магичан, једно представљање за број 2021 било би:

$$\underbrace{80 + 80 + \dots + 80}_5 + \underbrace{160 + 160 + \dots + 160}_{10} + 8 + 4 + 3 + 6 = 2021 \quad \text{и}$$

$$\underbrace{\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80}}_5 + \underbrace{\frac{1}{160} + \frac{1}{160} + \dots + \frac{1}{160}}_{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

Решење задатка припремио:
Милош Милосављевић