

МАТЕМАТИЧКИ ДЕСЕТОБОЈ

- ОСМО КОЛО -

РЕШЕЊЕ ПРОБЛЕМА

Број 1234567891011...20202021

За решавање проблема користићемо критеријум дељивости са 9:

Природни бројеви n и $S(n)$ (са $S(n)$ је обележен збир цифара природног броја n) при дељењу са 9 дају једнаке остатке, односно $n \equiv_9 S(n)$.

Осим овог искористићемо и познату једнакост за збир првих n природних бројева: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

На основу наведеног, за $x = 1234567891011...20202021$ важи:

$$x \equiv_9 S(x) \equiv_9 S(1) + S(2) + \dots + S(2020) + S(2021) \equiv_9 1 + 2 + \dots + 2020 + 2021 \equiv_9 \frac{2021 \cdot 2022}{2} \equiv_9 2021 \cdot 1011 \equiv_9 5 \cdot 3 \equiv_9 6.$$

Дакле, број x при дељењу са 9 даје остатак 6 (чиме је доказан део под а)). Да би избацивањем једне или више цифара постигли да је новодобијени број дељив са 9 потребно је и довољно да избацимо што мањи број цифара тако да збир избачених цифара при дељењу са 9 даје остатак 6. Уколико би тај збир био већи од 6, онда би његова вредност била бар 15, те би било неопходно избацивање бар две цифре. Са друге стране збир 6 се може постићи избацивањем само једне цифре. Закључујемо да је најмањи број цифара које треба избацити заправо једна цифра и њена вредност мора бити 6. У циљу добијања што већег броја треба избацити прву цифру 6, гледано са лева у десно (након тог избацивања првих шест цифара су цифре 123457, док избацивањем било које друге цифре 6 добијамо мањи број, пошто ће првих шест цифара бити 123456).

Решење задатка припремио:

Милош Милосављевић