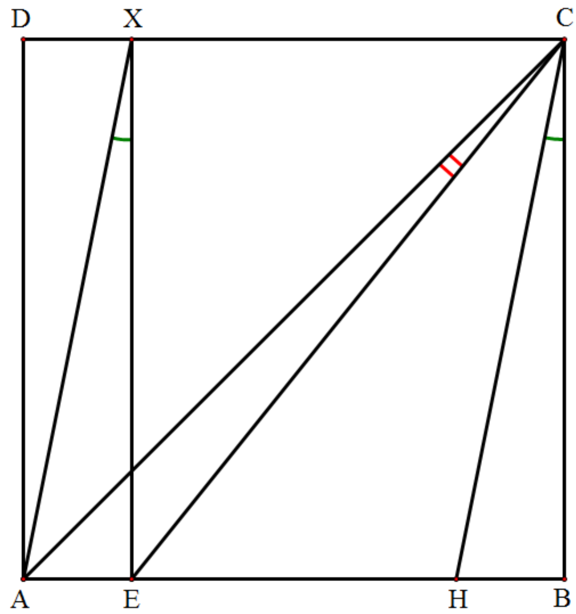
МАТЕМАТИЧКИ ДЕСЕТОБОЈ
- ПЕТО КОЛО -
РЕШЕЊЕ ПРОБЛЕМА
УГАО ОД 9°

Верујемо да вам је угао од 9°, након читања проблема деловао прилично мистериозно и да сличан задатак (где се помиње угао од 9°) до сада нисте виђали. Не ретко се дешава да проблеми на математичким такмичењима, након првог читања, делују изузетно "страшно" или барем апсолутно непознато. Код већине таквих проблема најзначајни фактор је да сузбијете "страх". Обично, ко успе да превазиђе овај моменат, има врло лепе изгледе и да успешно реши постављени проблем. Имајте увек на уму, барем што се тиче математичких такмичења, да је проблем који сте добили прилагођен вашем узрасту. Готово је сигурно да ћете успети да разумете решење. "Тренирањем" - вежбањем желимо, пре свега, да "учимо да размишљамо", те да своје изгледе за решавање и оваквих проблема озбиљно повећамо. Вратимо се сада постављеном проблему.

На слици већ постоји угао од 45°. Угао од 9° је петина тог угла. Идеја решења је једноставна - поделићемо угао од 45° на пет делова, тако да су задати углови $\angle ACE$ и $\angle AXE$ два од тих пет делова и... Шта би било "лепо" да се испостави за углове $\angle ACE$ и $\angle AXE$, како би доказали да је $\angle ACE$ мањи, а угао $\angle AXE$ већи од 9°? Идеално би било да је угао $\angle ACE$ најмањи од тих пет делова, а угао $\angle AXE$ највећи од тих пет делова. Заиста, то би нам гарантовало да је најмањи угао (а то је $\angle ACE$) мањи од $\frac{45^\circ}{5} = 9^\circ$, а највећи угао (а то је $\angle AXE$) већи од $\frac{45^\circ}{5} = 9^\circ$.

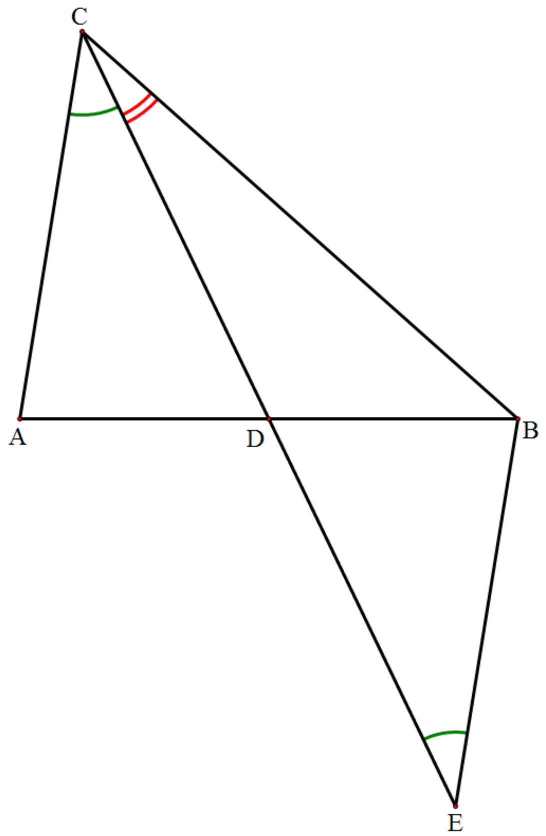
Угао $\angle ACE$ је саставни део угла $\angle ACB = 45^\circ$. "Пренесимо" угао $\angle AXE$ тако да и он постане саставни део истог угла ($\angle ACB$). То можемо учинити уколико на страници AB уочимо тачку H, такву да је $HB = 1$. Заиста, троуглови AEX и HBC су правоугли и имају једнаке катете, те су, по ставу СУС подударни. Одатле важи да је $\angle AXE = \angle HCB$. Овим смо "пренели" угао $\angle AXE$ унутар угла $\angle ACB = 45^\circ$ (видети слику).



За сада је угао $\angle ACB = 45^\circ$ подељен на три дела, од којих су два углови $\angle ACE$ и $\angle HCB$ (који је једнак са $\angle AXE$). Поделимо угао $\angle ECH$ на три дела. То можемо учинити ако уочимо ма које тачке F и G на дужи EH, тако да важи распоред тачака $E - F - G - H$ (тиме добијамо и углове $\angle ECF$, $\angle FCG$ и $\angle GCH$, односно угао $\angle ACB = 45^\circ$ је подељен на пет делова). Наравно, тачке F и G нећемо бирати насумично, већ са тежњом да се испостави да су сва три новодобијена угла $\angle ECF$, $\angle FCG$ и $\angle GCH$ већа од угла $\angle ACE$, а мања од угла $\angle HCB$. Да ли овог тренутка можете да наслутите један такав одабир тачака F и G? Уколико вам не иде лако да уочите такве тачке, вероватно у својој "бази знања" немате чињеницу (тврђење) коју ћемо сада доказати. Следеће тврђење је помоћног карактера у решавању задатог проблема. У математици, таква (помоћна) тврђења обично зовемо "лема" (вероватно сте чули за називе "теорема", "последица", "аксиома").

Лема: Нека је D средиште странице AB, троугла ABC. Ако је $AC < BC$, онда је $\angle ACD > \angle BCD$.

Доказ: На полуправој CD уочимо тачку E такву да важи распоред тачака $C-D-E$ и $DE = DC$ (видети слику).

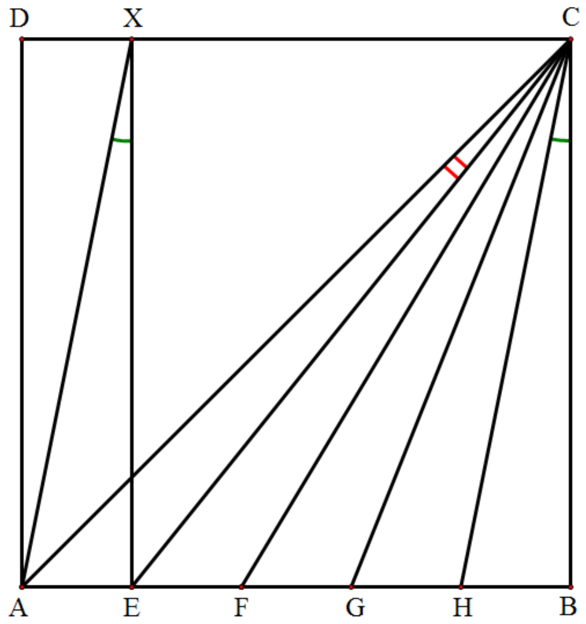


Сада су троуглови ADC и BDE подударни. Заиста, то следи по ставу СУС, пошто је $AD = BD$, $\angle ADC = \angle BDE$ и $DC = DE$. Из ове подударности имамо да је, у осталом, $AC = BE$ и $\angle ACD = \angle BED$. Уочимо троугао CEB. У њему је $EB = AC < BC$, па како у троуглу наспрам веће странице лежи већи угао, имамо да је $\angle BCD = \angle ECB < \angle CEB = \angle ACD$, што је и требало доказати.

Препоручујемо вам да, уколико малочас нисте имали идеју о избору тачака F и G на дужи EH, сада поново размислите.

Комплетирање решења проблема налази се на следећој страни.

Уочимо тачке F и G на дужи EH такве да је $EF = FG = GH = 1$ (видети слику).



При овом избору тачака F и G тачке E, F, G и H, су, редом, средишта страница AF, EG, FH и GB. Са друге стране, како су углови код темена F, G, H и B, редом, највећи углови у троугловима AFC, EGC, FHC и GBC, имамо да важи $AC > FC,\ EC > GC,\ FC > HC$ и $GC > BC$. Зато, примењујући доказану лему на троуглове AFC, EGC, FHC и GBC, редом, добијамо $\angle ACE < \angle ECF$, $\angle ECF < FCG$, $\angle FCG < \angle GCH$ и $\angle GCH < \angle HCB$, односно

$$\angle ACE < \ \angle ECF < \angle FCG < \angle GCH < \angle HCB.$$

Из наведене неједнакости, имајући на уму да је $\angle ACE + \angle ECF + \angle FCG + \angle GCH + \angle HCB = 45^\circ$ и $\angle HCB = \angle AXE$, коначно имамо $\angle ACE < 9^\circ < \angle AXE$, што је и требало доказати.

Решење задатка припремио:
Милош Милосављевић