# МАТЕМАТИЧКИ ДЕСЕТОБОЈ

### - ПРВО КОЛО -

### РЕШЕЊЕ ПРОБЛЕМА

# МАЂИОНИЧАРСКИ ТРИК

Ово је један од нестандардних математичких проблема који може имати и практичну примену. Вероватно би сте могли, након мало вежбе, заједно са неким у пару да изводите овај трик у свом друштву. Све би изгледало као магија, а у основи те магије је математика!

Надамо се да ће ово решење најпре бити јасно, али нам је циљ да вам приближимо начин размишљања. Зато ће оно бити написано уз питања која треба да утабају пут ка решењу (решења задатака на математичким такмичењима која пишу ученици није неопходно да изгледају овако, а обично и званична решења нису овако написана). Покушаћемо да вас, начином размишљања, наведемо на решење. Желимо да учимо да размишљамо!

Замислимо да на располагању имате један ананас, једну банану и једну вишњу. Уколико желите да пробате сва три плода, на колико различитих начина то можете да урадите (важно је који плод пробате први, који пробате други, а који трећи)? Означимо плодове са А (ананас), Б(банана) и В (вишња). Лако можемо уочити да су сви могући распореди: АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ и ВБА. Покушајмо сада да одгонетнемо следећу ситуацију: Перица сваке среде за ужину поједе један ананас, једну банану и једну вишњу. Он у среду има тест из географије, али је о томе обавестио само маму. Наставник географије прави тестове тако да одмах када ученик реши тест, добија одговарајућу оцену. Ипак, могуће је и да тест буде одложен. Перица је у среду, по доласку из школе, ужинао у друштву маме и тате. Мама је, без обзира што се том приликом није причало о тесту из географије, тачно знала да ли је тест из географије одржан и ако јесте коју је оцену добио Перица. То је открила тако што се договорила са Перицом у уторак увече на који начин ће он ужинати у среду, у зависности од добијене оцене. Како је могао да изгледа њихов договор? Суштински је важно да Перица на 6 различитих начина може да поједе воће за ужину, а да такође постоји 6 различитих могућности и за исход теста из географије. Зато се различити начини ужинања могу упарити са различитим начинима ишода теста. Један од могућих начина договора Перице и његове маме могао је да изгледа овако: уколико је Перица добио оцену 1 ужина АБВ; ако је добио 2 ужина АВБ; ако је добио 3 ужина БАВ; ако је добио 4 ужина БВА; ако је добио 5 ужина ВАБ; ако је тест одложен ужина ВБА. Тако су Перица и његова мама, у татином присуству, "причали" шифрованим порукама, при чему тата није могао то чак ни да наслути!

Пре него што се вратимо решавању полазног проблема разрешимо још једну ситуацију која нам је важна за његово решавање. Уколико на располагању имамо цифре 1,2,3,4 и 5, колико петоцифрених бројева можемо саставити, тако да се свака цифра у том петоцифреном броју појави тачно једном? Када формирамо петоцифрени број за прву цифру имамо 5 могућности (1,2,3,4 или 5). Након што одаберемо прву цифру, за избор друге цифре имамо 4 могућности (пошто је друга цифра различита од прве). Слично овом, број могућности за избор треће цифре је 3 (не могу се користити две већ одабране цифре), потом за четврту цифру 2 могућности и за пету само 1 могућност. Зато је укупан број могућности за састављање петоцифреног броја, при чему се свака од цифара 1,2,3,4 и 5, појављује тачно једном, једнак $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Уколико би желели да испишемо све такве бројеве најприроднији (наравно не и једини) начин за то би био да их поређамо по величини од најмањег ка највећем. Сви могући распореди приказани су у табели која следи, при чему је у загради наведен редни број петоцифреног броја при таквом ређању.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12345 (1) | 21345 (25) | 31245 (49) | 41235 (73) | 51234 (97) |
| 12354 (2) | 21354 (26) | 31254 (50) | 41253 (74) | 51243 (98) |
| 12435 (3) | 21435 (27) | 31425 (51) | 41325 (75) | 51324 (99) |
| 12453 (4) | 21453 (28) | 31452 (52) | 41352 (76) | 51342 (100) |
| 12534 (5) | 21534 (29) | 31524 (53) | 41523 (77) | 51423 (101) |
| 12543 (6) | 21543 (30) | 31542 (54) | 41532 (78) | 51432 (102) |
| 13245 (7) | 23145 (31) | 32145 (55) | 42135 (79) | 52134 (103) |
| 13254 (8) | 23154 (32) | 32154 (56) | 42153 (80) | 52143 (104) |
| 13425 (9) | 23415 (33) | 32415 (57) | 42315 (81) | 52314 (105) |
| 13452 (10) | 23451 (34) | 32451 (58) | 42351 (82) | 52341 (106) |
| 13524 (11) | 23514 (35) | 32514 (59) | 42513 (83) | 52413 (107) |
| 13542 (12) | 23541 (36) | 32541 (60) | 42531 (84) | 52431 (108) |
| 14235 (13) | 24135 (37) | 34125 (61) | 43125 (85) | 53124 (109) |
| 14253 (14) | 24153 (38) | 34152 (62) | 43152 (86) | 53142 (110) |
| 14325 (15) | 24315 (39) | 34215 (63) | 43215 (87) | 53214 (111) |
| 14352 (16) | 24351 (40) | 34251 (64) | 43251 (88) | 53241 (112) |
| 14523 (17) | 24513 (41) | 34512 (65) | 43512 (89) | 53412 (113) |
| 14532 (18) | 24531 (42) | 34521 (66) | 43521 (90) | 53421 (114) |
| 15234 (19) | 25134 (43) | 35124 (67) | 45123 (91) | 54123 (115) |
| 15243 (20) | 25143 (44) | 35142 (68) | 45132 (92) | 54132 (116) |
| 15324 (21) | 25314 (45) | 35214 (69) | 45213 (93) | 54213 (117) |
| 15342 (22) | 25341 (46) | 35241 (70) | 45231 (94) | 54231 (118) |
| 15423 (23) | 25413 (47) | 35412 (71) | 45312 (95) | 54312 (119) |
| 15432 (24) | 25431 (48) | 35421 (72) | 45321 (96) | 54321 (120) |

Да ли сада можете да решите полазни проблем - на који начин могу да се договоре мађионичар и асистент како би трик успео? Размислите, будите истрајни, није тешко!

Без обзира да ли успете или не, предлажемо вам да прочитате решења која се налазе на наредној страни. Прво од тих решења је "званично" решење - оно које смо имали на уму када смо вам поставили овај проблем. Друго решење је први послао ДИРИХЛЕ и оно је благо компликованије у математичком погледу, али је зато практичније за само извођење трика. Захваљујемо се на овом лепом решењу.

**Прво решење:** Посматрајмо најмањи број који је изговорила особа из публике. Од тог броја има 5 бројева који су изговорени и већи су од њега, па како су сви изговорени бројеви различити, тај број није већи од $125 - 5 = 120$. Дакле, најмањи изговорени број је између 1 и 120. Асистент и мађионичар могу имати следећу стратегију: асистент ће уочити најмањи број и мађионичар ће погађати баш тај број; асистент преосталих пет бројева (изузев најмањег) поређа по величини (од најмањег ка највећем) и привремено их означи са 1,2,3,4 и 5; потом асистент направи одговарајући распоред бројева 1,2,3,4 и 5 (могућих распореда је, као што смо већ описивали и како је наведено у табели, укупно 120) тако да опише мађионичару најмањи број.

Да би вам на најбољи начин описали како стратегија функционише, посматрајмо један конкретан пример. Нека је особа из публике одабрала бројеве 56, 37,118, 74, 62 и 100. Асистент жели да мађионичару опише најмањи број, односно 37. Преостале бројеве асистент најпре поређа по величити 56,62,74,100 и 118 и додели им ознаке 1,2,3,4 и 5 (56 је 1, 62 је 2, 74 је 3, 100 је 4 и 118 је 5). Сада број 37 описује на следећи начин (распоредом који је 37. у табели): 24135. То заправо значи да мађионичару саопштава редом бројеве: 62, 100, 56, 74 и 118. Када мађионичар ово чује, он зна да је распоред 24135, а на основу табеле то је 37. распоред и погађа број 37.

Оно шта је врло логично да се запитамо да ли је неопходно да мађионичар и асистен науче напамет табелу коју смо вам приказали и која им служи за извођење трика? Заправо, да ли је неопходна табела, да би асистент и мађионичар описали (за пример који посматрамо) број 37? Покушајте да сами смислите једноставан начин како се утврђује (без гледања у табелу) да је 37. распоред баш 24135.

**Друго решење:** Нека су бројеви које је одабрала особа из публике $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$. Посматрајмо разлике $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, $x_4 - x_3$, $x_5 - x_4$ и $x_6 - x_5$. Збир ових 5 природних бројева једнак је $x_6 - x_1$, а то је највише 124. Зато међу тих 5 бројева постоји бар један који није већи од 24. Заиста, ако би сви били већи од 24, њихов збир би био бар $5 \cdot 25 = 125$, што није могуће. Дакле, бар једна разлика $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, $x_4 - x_3$, $x_5 - x_4$ или $x_6 - x_5$ није већа од 24. Уколико имамо 4 различита објекта, њих можемо распоредити на $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ различита начина. Асистен и мађионичар могу имати следећу стратегију: асистент уочи пар бројева где је разлика најмања (ако има више таквих парова, одабере било који од њих) и најпре мађионичару саопшти мањи од тих бројева. Циљ ће бити да мађионичар погоди већи број из тог пара. Помоћу 4 преостала броја, њиховим распоредом (а може их распоредити на 24 различита начина), асистент описује разлику између већег и мањег броја из уоченог пара.

Посматрајмо већ наведени пример - особа из публике одабрала је бројеве 56, 37,118, 74, 62 и 100 и опишимо шта раде мађионичар и асистент. Асистент најпре уочи пар са најмањом разликом. То је пар 56 и 62. Мађионичару прво саопшти број 56. Од преостала 4 броја 37,74,100 и 118 мађионичару треба да опише разлику из пара, која износи 6. Као и у првом решењу, бројевима 37, 74, 100 и 118 асистент додели, редом, ознаке 1,2,3 и 4. Како је шести четвороцифрени број по величини који се може формирати од цифара 1,2,3 и 4, без понављања цифара, број 1432, то асистент редом изговара бројеве 37,118,100 и 74. Када мађионичар ово чује, он дешифрује да је разлика једнака 6, па је тиме преостали број једнак $56 + 6 = 62$.

Решење задатка припремио:
Милош Милосављевић